第 3 节 数列综合大题专项（★★★☆）

强化训练

1．（2022•北京模拟•★★★）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，且 $a_1=1$，$b_1=2$，$a_2+a_8=10$，______．现有条件：①$\lambda S_n=b_n-1(\lambda\in\mathbf{R})$；②$a_4=S_3-2S_2+S_1$；③$b_n=2\lambda a_n(\lambda\in\mathbf{R})$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）条件①②③中有一个不符合题干要求，请直接指出；（无需证明）

（3）从剩余的两个条件中选一个填到上面的横线上，求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和T_n．

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为 d，则$a_2+a_8=a_1+d+a_1+7d=10$，结合$a_1=1$可得$d=1$，所以$a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$．

（2）③不符合题干要求，因为$a_n=n$，所以③即为$b_n=2\lambda n$，对任意的$\lambda\in\mathbf{R}$，$\{b_n\}$都不是等比数列．

（3）若选①，则$\lambda S_n=b_n-1$，（已知b_1，可先在此式中取$n=1$求出λ）

所以$\lambda S_1=\lambda b_1=b_1-1$，又$b_1=2$，所以$\lambda=\dfrac{1}{2}$，故$\dfrac{1}{2}S_n=b_n-1$，

（题干已经给出了$\{b_n\}$为等比数列，故此处无需退 n 相减，直接再取$n=2$求出b_2即可求得公比）

所以$\dfrac{1}{2}S_2=b_2-1$，故$\dfrac{1}{2}(2+b_2)=b_2-1$，解得：$b_2=4$，所以$\{b_n\}$的公比$q=\dfrac{b_2}{b_1}=2$，故$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$，

（再求$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和，此为两数列相加，分别求和再相加即可）

所以$T_n=a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(1+2+\cdots+n)+(2^1+2^2+\cdots+2^n)=\dfrac{n(1+n)}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{n(1+n)}{2}+2^{n+1}-2$．

若选②，则$a_4=S_3-2S_2+S_1$，所以$4=b_1+b_2+b_3-2(b_1+b_2)+b_1=b_3-b_2$，

设$\{b_n\}$的公比为 q，因为$\{b_n\}$各项均为正数，所以$q>0$，又$b_1=2$，所以$b_3-b_2=4$即为$2q^2-2q=4$，

解得：$q=2$或-1（舍去），所以$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$，接下来同解法 1．

2．（2023•绵阳二诊•★★★）已知等比数列$\{b_n\}$的各项都为正数，$b_1=\dfrac{2}{3}$，$b_3=\dfrac{8}{27}$，数列$\{a_n\}$的首项为 1，前 n 项和为S_n，请从下面①②③中选一个作为条件，判断是否存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\le a_mb_m$恒成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由．

①$2a_n-S_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$；②$a_2=\dfrac{1}{4}$且$a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2(n\ge 2)$；③$a_n-1=a_{n-1}(n\ge 2)$．

解：（分析后续问题都要用b_n，故先求b_n）设$\{b_n\}$的公比为 q，因为$\{b_n\}$各项均为正数，所以$q>0$，

由题意，$\frac{b_3}{b_1}=q^2=\frac{4}{9}$，结合 $q>0$ 可得 $q=\frac{2}{3}$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=(\frac{2}{3})^n$，（接下来分别分析三种选法）

若选①作为条件，则 $2a_n-S_n=1$，（此为 a_n 与 S_n 混搭的关系式，要求 a_n，可尝试退 n 相减，消去 S_n）

所以当 $n\geq 2$ 时，$2a_{n-1}-S_{n-1}=1$，从而 $2a_n-S_n-(2a_{n-1}-S_{n-1})=0$，

故 $2a_n-2a_{n-1}-(S_n-S_{n-1})=2a_n-2a_{n-1}-a_n=0$，整理得：$a_n=2a_{n-1}$，

又 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故 $a_n=2^{n-1}$，所以 $a_nb_n=2^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cdot\frac{2^n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3})^n$，

（“存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\leq a_mb_m$”的意思是 a_mb_m 是 $\{a_nb_n\}$ 的最大项，故应分析 $\{a_nb_n\}$ 有无最大项）

因为函数 $y=\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $\{a_nb_n\}$ 是递增数列，没有最大项，

故不存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\leq a_mb_m$ 恒成立.

若选②作为条件，则 $a_2=\frac{1}{4}$，且 $a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2(n\geq 2)$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，故 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}$，

所以 $a_n=(\frac{1}{4})^{n-1}$，故 $a_nb_n=(\frac{1}{4})^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n=4\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{2^n}{3^n}=4\cdot(\frac{1}{6})^n$，

因为 $y=4\cdot(\frac{1}{6})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $\{a_nb_n\}$ 为递减数列，故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\leq a_1b_1$ 恒成立，所以 $m=1$.

若选③作为条件，则 $a_n-1=a_{n-1}$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$，故 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

又 $a_1=1$，所以 $a_n=1+(n-1)\times 1=n$，故 $a_nb_n=n\cdot(\frac{2}{3})^n$，

（要分析 $\{a_nb_n\}$ 有无最大项，考虑到函数 $y=x\cdot(\frac{2}{3})^x$ 的单调性不易判断，故用作差法来分析 $\{a_nb_n\}$ 的单调性）

记 $c_n=n\cdot(\frac{2}{3})^n$，则 $c_{n+1}-c_n=(n+1)\cdot(\frac{2}{3})^{n+1}-n\cdot(\frac{2}{3})^n=(\frac{2}{3})^n\cdot[\frac{2(n+1)}{3}-n]=(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{2-n}{3}$，

所以当 $n=1$ 时，$c_{n+1}-c_n>0$，故 $c_1<c_2$；当 $n=2$ 时，$c_{n+1}-c_n=0$，所以 $c_2=c_3$；

当 $n\geq 3$ 时，$c_{n+1}-c_n<0$，所以 $c_n>c_{n+1}$；综上所述，$c_1<c_2=c_3>c_4>c_5>\cdots$，

所以 $\{c_n\}$ 有最大项，最大项为 c_2 和 c_3，故当 $m=2$ 或 3 时，就有 $a_nb_n\leq a_mb_m$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

3．（2023·赤峰模拟·★★★）正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=3$，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且_____.

从下面的三个条件中选一个填在上面的横线上，并解答后面的两个问题.

① $a_{2k-1}=k(2k-1)$ 且 $a_{2k}=k(2k+1)$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$；② $\{\sqrt{8a_n+1}\}$ 为等差数列；③ $\{(n+1)S_n\}$ 为等差数列.

问题：（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）求证：$S_na_n=n^2$.

解：（1）若选①，则 $a_{2k-1}=k(2k-1)$ 且 $a_{2k}=k(2k+1)$，（此为奇数项、偶数项的通项公式，合并成 a_n 即可）

当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=\frac{n+1}{2}$，所以 $a_n=a_{2k-1}=k(2k-1)=\frac{n+1}{2}\cdot n=\frac{n(n+1)}{2}$；

当 n 为偶数时，设 $n=2k$，则 $k=\frac{n}{2}$，所以 $a_n=a_{2k}=k(2k+1)=\frac{n}{2}(2\cdot\frac{n}{2}+1)=\frac{n(n+1)}{2}$；

综上所述，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

若选②，则 $\{\sqrt{8a_n+1}\}$ 为等差数列，（题干中还给了 a_1 和 a_2，故可求出 $\{\sqrt{8a_n+1}\}$ 的前两项，进而求得其通项）

又 $a_1=1$，$a_2=3$，所以 $\sqrt{8a_1+1}=3$，$\sqrt{8a_2+1}=5$，故数列 $\{\sqrt{8a_n+1}\}$ 的公差为 $5-3=2$，

所以 $\sqrt{8a_n+1}=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$，从而 $8a_n+1=(2n+1)^2$，故 $a_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

若选③，则 $\{(n+1)S_n\}$ 为等差数列，（仍可结合 a_1，a_2 求得数列 $\{(n+1)S_n\}$ 的前两项，进而求得其通项）

因为 $a_1=1$，$a_2=3$，所以 $2S_1=2\cdot\dfrac{1}{a_1}=2$，$3S_2=3(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2})=4$，故 $\{(n+1)S_n\}$ 的公差为 $4-2=2$，

所以 $(n+1)S_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$，故 $S_n=\dfrac{2n}{n+1}$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{1}{a_n}=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{2(n-1)}{n}=\dfrac{2n^2-2(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}$，故 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

（2）由（1）可得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$，故 $S_na_n=\dfrac{2n}{n+1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=n^2$.

4.（2023 •阜阳模拟 •★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$，等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_1-1$，$b_3=a_2-1$.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，求满足 $T_n=S_m(4<n\le 10)$ 的所有数对 (n,m).

解：（1）由题意，$b_2=a_1-1=2$，$b_3=a_2-1=4$，所以 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=2$，故 $b_n=b_2q^{n-2}=2^{n-1}$.

（2）由（1）可得 $S_n=\dfrac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$，$T_n=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，

所以 $T_n=S_m$ 即为 $2^n-1=m(m+2)$，整理得：$2^n=(m+1)^2$ ①，

（因为 $4<n\le 10$，所以 n 的取值只有 6 个，逐一代入能求出 m，但注意到右侧是正整数的完全平方，故由此对 n 分析奇偶可以缩小搜索的范围，更简单）

由①可得 2^n 只能为正整数的平方，所以 n 只能取偶数，结合 $4<n\le 10$ 可得 n 的取值只能为 6，8，10，

当 $n=6$ 时，$m=2^3-1=7$；当 $n=8$ 时，$m=2^4-1=15$；当 $n=10$ 时，$m=2^5-1=31$；

综上所述，满足条件的数对 (n,m) 有 $(6,7)$，$(8,15)$，$(10,31)$.

5.（2023 • 盐城模拟 • ★★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$，$b_3=8$，$a_n=\log_2 b_n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 中不在数列 $\{b_n\}$ 中的项按从小到大的顺序构成数列 $\{c_n\}$，记 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_{50}.

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_n=\log_2 b_n$，所以 $b_n>0$，故 $q>0$，

在 $a_n=\log_2 b_n$ 中取 $n=1$ 可得 $a_1=\log_2 b_1$，所以 $b_1=2^{a_1}=2$，又 $b_3=8$，所以 $\frac{b_3}{b_1}=q^2=4$，

结合 $q>0$ 可得 $q=2$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$，故 $a_n=\log_2 b_n=\log_2 2^n=n$.

（2）（先分析 $\{a_n\}$ 的前 50 项中有几项也在 $\{b_n\}$ 中）由（1）可得 $a_{50}=50$，因为 $b_5=32<50$，$b_6=64>50$，所以 $\{a_n\}$ 的前 50 项中有 5 项在 $\{b_n\}$ 中，把它们去掉，还剩 45 项，

（故再看 $a_{51},a_{52},a_{53},a_{54},a_{55}$ 中还有没有 $\{b_n\}$ 中的项，若没有，那么直接补上去，总共就 50 项了）

又 $a_{55}=55<b_6$，所以 $\{c_n\}$ 的前 50 项即为 $\{a_n\}$ 的前 55 项去掉 $\{b_n\}$ 的前 5 项后余下的，

故 $S_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{55})-(b_1+b_2+\cdots+b_5)=\frac{55\times(1+55)}{2}-\frac{2\times(1-2^5)}{1-2}=1478$.

6.（2023•武汉二调•★★★★）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对任意的正整数 n，有 $2S_n=na_n$，且 $a_2=3$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）对所有正整数 m，若 $a_k<2^m<a_{k+1}$，则在 a_k 和 a_{k+1} 两项中插入 2^m，由此得到一个新的数列 $\{b_n\}$，求 $\{b_n\}$ 的前 40 项和.

解：（1）（给出 S_n 与 a_n 混搭的关系式，要求 a_n，考虑退 n 相减消去 S_n）

因为 $2S_n=na_n$，所以当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，从而 $2S_n-2S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

故 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，整理得：$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$ ①，

（此式若再化为 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$，则可用累乘法求 a_n，但 $n=2$ 时分母为 0，故需单独考虑）

在①中令 $n=2$ 可得 $a_1=0$，当 $n\ge 3$ 时，式①可变形成 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$，

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot 3=3(n-1)$，

又 $a_1=0$，$a_2=3$ 也满足上式，所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=3(n-1)$.

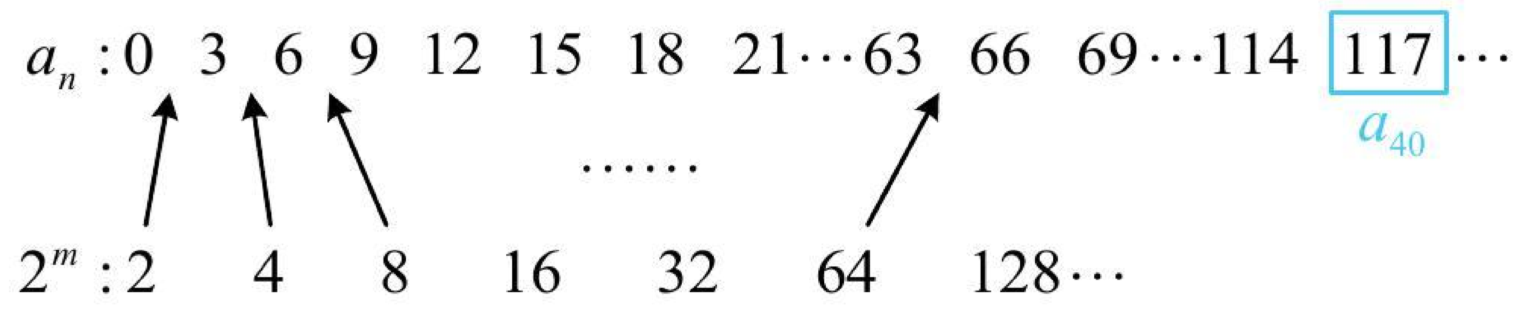
（2）（需先分析 $\{b_n\}$ 的前 40 项哪些是原来 $\{a_n\}$ 的，哪些是新插入的，可列出若干项来观察，如图）

由（1）可得 $a_{40}=3\times(40-1)=117$，因为 $2^6<a_{40}<2^7$，所以插入后 2^7 不在 $\{b_n\}$ 的前 40 项中，

（还需说明 64（即 2^6）在 $\{b_n\}$ 的前 40 项）又 $2^6<a_{34}=99$，所以 2^6 在 $\{b_n\}$ 的前 40 项中，

故 $\{b_n\}$ 的前 40 项中，有 34 项是原数列 $\{a_n\}$ 的，有 6 项是新插入的，分别是 2^1，2^2，…，2^6，

所以 $\{b_n\}$ 的前 40 项和为 $a_1+a_2+\cdots+a_{34}+2^1+2^2+\cdots+2^6=\frac{34\times(0+99)}{2}+\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=1809$.



7.（2023•新高考Ⅰ卷•★★★★）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$，令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和.

（1）若$3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求d.

解：（1）（所给条件容易用公式翻译，故直接代公式，建立关于a_1和d的方程组并求解）

因为$3a_2=3a_1+a_3$，所以$3(a_1+d)=3a_1+(a_1+2d)$，整理得：$a_1=d$ ①，

又$S_3=3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=3a_1+3d$，$T_3=b_1+b_2+b_3=\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{6}{a_2}+\dfrac{12}{a_3}=\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{6}{a_1+d}+\dfrac{12}{a_1+2d}$，

代入$S_3+T_3=21$可得$3a_1+3d+\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{6}{a_1+d}+\dfrac{12}{a_1+2d}=21$ ②，

将①代入②整理得：$2d+\dfrac{3}{d}=7$，解得：$d=3$或$\dfrac{1}{2}$，

又由题意，$d>1$，所以$d=3$，结合①可得$a_1=3$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n$.

（2）（条件$\{b_n\}$为等差数列怎样翻译？可先由b_1，b_2，b_3为等差数列建立方程找a_1和d的关系）

由题意，$b_1=\dfrac{2}{a_1}$，$b_2=\dfrac{6}{a_1+d}$，$b_3=\dfrac{12}{a_1+2d}$，

因为$\{b_n\}$为等差数列，所以$2b_2=b_1+b_3$，故$\dfrac{12}{a_1+d}=\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{12}{a_1+2d}$，

（上式要化简，同乘以 3 个分母即可）

所以$12a_1(a_1+2d)=2(a_1+d)(a_1+2d)+12a_1(a_1+d)$，

整理得：$(a_1-d)(a_1-2d)=0$，所以$a_1=d$或$a_1=2d$，

（求d肯定要由$S_{99}-T_{99}=99$来建立方程，故讨论上述两种情况，分别求出S_n和T_n）

若$a_1=d$，则$a_n=a_1+(n-1)d=nd$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(d+nd)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}d$，$b_n=\dfrac{n^2+n}{nd}=\dfrac{n+1}{d}$，

所以$T_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=\dfrac{n(\frac{2}{d}+\frac{n+1}{d})}{2}=\dfrac{n(n+3)}{2d}$，

故$S_{99}-T_{99}=99$即为$99\times50d-\dfrac{99\times51}{d}=99$，解得：$d=\dfrac{51}{50}$或$-1$（舍去）；

若$a_1=2d$，则$a_n=a_1+(n-1)d=(n+1)d$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2d+(n+1)d]}{2}=\dfrac{n(n+3)}{2}d$，$b_n=\dfrac{n^2+n}{(n+1)d}=\dfrac{n}{d}$，

所以$T_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=\dfrac{n(\frac{1}{d}+\frac{n}{d})}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2d}$，

故$S_{99}-T_{99}=99$即为$99\times51d-\dfrac{99\times50}{d}=99$，解得：$d=-\dfrac{50}{51}$或 1，均不满足$d>1$，舍去；

综上所述，d的值为$\dfrac{51}{50}$.

【反思】本题第（2）问也可直接设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n = pn+q$，$b_n = rn+s$，利用两个已知条件建立关于系数p，q，r，s的方程组，进而求出答案. 只是这一解法稍显麻烦，可自行尝试.